SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Bruno Franchi

UNA APPROSSIMAZIONE CON ELEMENTI FINITI PER UNA CLASSE DI EQUAZIONI ELLITTICHE DEGENERI

18 aprile 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto. In questo seminario presentiamo alcuni risultati ottenuti in collaborazione con M.C. Tesi sulla costruzione di uno schema agli elementi finiti per il problema di Dirichlet in un rettangolo del piano asssociato a un operatore ellittico degenere 'tipo Grushin'. Il metodo consiste essenzialmente nell'utilizzare una triangolazione che rispetta la geometria associata all'operatore tramite la metrica di Carnot-Carathéodory.

Abstract. In this seminar we sketch some recent results obtained jointly with M.C. Tesi concerning a finite element method for the Dirichlet problem associated with a degenerate elliptic operator of Grushin type. Basically, the method consists of using a triangularization fitting the Carnot-Carathéodory metric associated with the operator.

I risultati esposti in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con M. C. Tesi ([FT]). Sia $\Omega =]-1,1[\times]-1,1[$ un cubo in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, e sia Γ il suo bordo. Consideriamo l'operatore del secondo ordine in forma di divergenza in Ω definito da

$$\mathcal{L} = -\sum_{i,j=1}^{2} \partial_i(a_{ij}(z)\partial_j), \tag{1.1}$$

dove i coefficienti $a_{ij} = a_{ji}$ sono funzioni reali misurabili e, per qualche $\nu \in (0,1)$,

$$\nu(\xi^2 + \lambda^2(x)\eta^2) \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(z)\zeta_i\zeta_j \leq \frac{1}{\nu}(\xi^2 + \lambda^2(x)\eta^2). \tag{1.2}$$

per ogni $\zeta = (\xi, \eta)$ e $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Qui λ è una funzione Lipschitziana nonnegativa in $\mathbb{R}$. Operatori di questa forma sono noti in letteratura come operatori tipo Grushin e le proprietà di regolarità delle soluzioni deboli di $\mathcal{L}u = f$ sono state ampiamente studiate negli ultimi anni: si vedano, ad esempio, [FL], [X], [FS],[F],[FGuW1,2].

Un produttivo approccio allo studio di questi operatori ha consistito (si veda [FL]) nell'associare all'operatore $\mathcal{L}$ una opportuna metrica (non Riemanniana) d che è fondamentalmente data dal minimo tempo necessario per passare da un punto a un altro lungo curve continue che sono a tratti curve integrali dei campi vettoriali $\pm\partial_1$ e $\pm\lambda\partial_2$ (si veda la Definizione 2.1 per una definizione precisa). Se per esmpio siamo interessati alla regolarità Hölderiana delle soluzioni deboli (teorema di De Giorgi-Nash-Moser) o alla disuguaglianza di Harnack per le soluzioni deboli positive, possiamo ripetere le tecniche classiche sviluppate per equazioni ellittiche ([DG], [Mo]) sostituendo le usuali sfere Euclidee con le cosidette *sfere metriche*, cioè le sfere della metrica d.

Lo scopo di questo lavoro è quello di mostrare che un simile approccio geometrico ci permette di sviluppare una approssimazione con elementi finiti per questa classe di operatori. Infatti costruiremo una triangolazione di una regione piana per mezzo di una famiglia di triangoli non isotropi che rispecchia la geometria associata alla metrica d, nel senso che ogni triangolo della nostra triangolazione contiene ed è contenuto in due sfere metriche di raggi confrontabili. La forma di questi triangoli non sarà banale a descriversi, poichè le sfere metriche non sono invarianti rispetto alle traslazioni euclidee, così che non possiamo semplicemente ripetere una stessa sfera traslandola e, analogamente, non ci sono omotetie che permettano di riscalare le nostre stime.

Recentemente, nello stesso spirito un metodo alle differenze finite per equazioni tipo Kolmogorov è stato sviluppato in [MP].

Sottolineamo che il nostro approccio non è precisamente un metodo adattivo, perchè, per così dire, la geometria è fissata a priori ed è data dal nostro operatore modello $\partial_1^2 + \lambda^2(x)\partial_2^2$ che gioca il ruolo di un operatore di Laplace-Beltrami per la nostra geometria. Anzi, un metodo adattivo può essere sovrapposto alla nostra geometria, in modo da tener conto dell'oscillazione dei coefficienti.

Notiamo esplicitamente che, a causa della mancanza di ellitticità dove λ si annulla, dobbiamo cercare soluzioni deboli in spazi funzionali più grandi dell'usuale spazio di Sobolev $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ e che sono dati dal completamento di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda\partial_2 u\|_{L^2(\Omega)},$$

così che in generale le nostre soluzioni deboli non appartengono a $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Questo approccio è stato usato per una classe molto più grande di operatori ellittici degeneri, il cui prototipo è dato dagli operatori somma di quadrati di Hörmander in $\mathbb{R}^n$ della forma $\sum_{j=1}^n X_j^2$, dove $X_1, \ldots, X_n$ sono campi vettoriali infinitamente derivabili tali che il rango dell'algebra di Lie generata da essi è uguale a n in ogni punto. Ad esempio, se scegliamo $\lambda(x) = |x|^k$, per qualche naturale k, il nostro operatore modello $\partial_1^2 + |x|^{2k}\partial_2^2$ è un operatore di Hörmander. Poichè noi tratteremo con funzioni λ non infinitamente derivabili, dovremo imporre ulteriori condizioni su λ per sostituire questa ipotesi del rango (si veda l'Ipotesi (H) più sotto).

Se noi cerchiamo di seguire lo schema della prova di Moser della regolarità puntuale delle soluzioni deboli di $\mathcal{L}u = f$, fin dal principio ci sono due punti che appaiono giocare un ruolo chiave: il fatto che la metrica d è *doubling* (cioè il volume della sfera metrica di raggio $2r$ è controllato da una costante per il volume di una sfera metrica di raggio r con lo stesso centro), e una opportuna disuguaglianza di Sobolev-Poincaré sulle sfere metriche, dove a destra dobbiamo sostituire l'usuale gradiente ∇u con il 'gradiente degenere' $\nabla_\lambda u = (\partial_1, \lambda\partial_2)$ associato all'operatore. Queste disuguaglianze contengono profonde informazioni riguardanti la geometria associata alla metrica d, poichè mostrano che la dimensione geometrica dello spazio metrico definito da d è molto più grande di 2 (o di n in generale) e, per così dire, è tanto più grande quanto più λ è degenere. Questo fenomeno è stato studiato nel contesto più generale dei campi vettoriali tipo Hörmander e appare chiaramente in una famiglia di disuguaglianze isoperimetriche (si vedano [FGaW], [FLW], [CDG1,2], [GN], [Gr]).

Purtroppo questo fenomeno dimensionale influisce negativamente sulle nostre stime dell'errore. Infatti, per prima cosa, non abbiamo un teorema di immersione di Sobolev per controllare i valori puntuali di una soluzione debole per mezzo di norme di Sobolev di ordine $s > 1 = n/2$, per $n = 2$, come nel caso ellittico, proprio perchè la dimensione di (Ω, d) è in generale molto più grande di 2. È tuttavia possibile superare questa difficoltà, ma lo stesso fenomeno dimensionale riappare nell'approssimazione numerica, perchè, in corrispondenza a una griglia di n^2 punti, troviamo una stima dell'errore dell'ordine di $n^{1/(\gamma+1)}$, dove $\gamma \geq 0$ e $\gamma+2$ è la dimensione geometrica di (Ω, d). In altre parole, ci occorre un grande numero di triangoli per ottenere piccoli errori, molti di più che nel caso ellittico, e tanti più quanto più λ è 'piatto' nei punti dove si annulla, così che la nostra approssimazione converge, ma l'ordine di convergenza dipende dall'ordine di degenerazione di λ. È quindi necessario tener conto di questo fenomeno quando si confrontano i nostri risultati numerici con quelli che possiamo ottenere semplicemente facendo girare 'brutalmente' procedure numeriche fuori da ogni schema teorico ottenendo buoni risultati fuori dagli zeri di λ (poichè l'operatore $\mathcal{L}$ è localmente ellittico in queste regioni). Discuteremo anche l'implementazione algoritmica del metodo, e mostreremo, analizzando opportuni esempi, che – come è giusto attenderci – la stima dell'errore nella norma dell'energia può essere migliore di quella ottenuta con una triangolazione uniforme, o anche con una triangolazione uniforme adattiva (ma sottolineiamo ancora che l'uso di una triangolazione uniforme non ha giustificazione teorica, perchè ci sono soluzioni che non appartengono agli usuali spazi di Sobolev $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$). Per finire, forniremo esempi numerici che mostrano che la nostra stima dell'errore è ottimale.

2. In questa lavoro denoteremo un generico punto di $\mathbb{R}^2$ con $z = (x, y)$. Nel seguito assumeremo che la funzione λ soddisfi la seguente ipotesi:

Ipotesi (H) *Esiste una costante positiva c_1 tale che, per ogni intervallo compatto $I \subseteq \mathbb{R}$*

$$0 < c_1 \max_I \lambda \leq \frac{1}{|I|} \int_I \lambda(x)dx \leq \max_I \lambda$$

dove $|I|$ è la lunghezza di I.

Questa condizione è chiamata condizione RH_∞ in [F] e [FGuW1]; per commenti sul suo significato geometrico, si veda [CF].

Definizione 2.1. *Diremo che una curva assolutamente continua $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ è una curva sub-unitaria se per ogni $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$,*

$$< \dot{\gamma}(t), \zeta >^2 \leq |\xi|^2 + \lambda^2(\gamma(t))|\eta|^2$$

per q.o. $t \in [0, T]$ (per semplificare le nostre notazioni abbiamo considerato qui λ come una funzione di $z \in \mathbb{R}^2$). Se $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$, poniamo

$$d(z_1, z_2) = inf\,\{T > 0;\ esiste\ una\ curva\ sub\text{-}unitaria\ \gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^2$$
$$tale\ che\ \gamma(0) = z_1, \gamma(T) = z_2\}.$$

Per l'ipotesi (H), $d(z_1, z_2) < \infty$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ e quindi è una metrica.
Se ora $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, poniamo

$$F(z, r) = F(x, r) = \int_x^{x+r} \lambda(s)ds \tag{2.1}$$

Diremo che una costante $c \geq 0$ è una costante geometrica se dipende dalla costante c_1 dell'Ipotesi (H) e da $\sup \lambda$. Per alleggerire le nostre notazioni, talora indicheremo con la stessa lettera c differenti costanti geometriche.

Abbiamo:

Proposizione 2.2 ([FGuW1], Proposizione 2.5). *Supponiamo che valga (H). Allora per ogni punto $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esistono un intorno $\mathcal{U}$ di z_0 e una costante geometrica $\gamma \geq 0$ tali che*

(i) $F(z, \theta t) \geq c\theta^{1+\gamma} F(z, t)$, $0 < \theta < 1$;
(ii) $F(z, \theta t) \leq c\theta^{1+\gamma} F(z, t)$, $\theta > 1$;
(iii) $F^{-1}(z, \theta t) \leq c\theta^{1/(1+\gamma)} F^{-1}(z, t)$, $0 < \theta < 1$;
(iv) $F^{-1}(z, \theta t) \geq c\theta^{1/(1+\gamma)} F^{-1}(z, t)$, $1 < \theta$;
(v) $F(z, \theta t) \leq c\theta F(z, t)$, $0 < \theta < 1$;
(vi) $F(z, \theta t) \geq c\theta F(z, t)$, $\theta > 1$;
(vii) $F^{-1}(z, \theta t) \geq c\theta F^{-1}(z, t)$, $0 < \theta < 1$; *in particolare, se x appartiene al compatto [-1,1], allora $F(z, r) \leq c_r$ per $r \leq \bar{r}$;*
(viii) $F^{-1}(z, \theta t) \leq c\theta F^{-1}(z, t)$, $1 < \theta$;
(ix) *se $d(z_1, z_2) < ct$, allora$F(z_1, t) \sim F(z_2, t)$,*

per $0 < t < t_0$ e $z \in \mathcal{U}$, dove c è una costante geometrica.

In particolare, da (i) segue che

$$\int_0^t \lambda(x + s\xi)\, ds \geq ct^{1+\gamma} \tag{2.2}$$

per ogni $z = (x, y) \in \mathcal{U}$, $\xi \in S_0 = \{\xi \in \mathbb{R}\ ;\ |\xi - \xi_0| \leq \delta\} \subset [-1, 1] \setminus \{0\}$ e $t \in (0, t_0)$.

Osserviamo che dalla Proposizione 2.2 (iii), si ottiene la seguente proprietà di doubling

$$F(z, r) \leq F(z, 2r) \leq cF(z, r) \tag{2.3}$$

per ogni $z \in \mathcal{U}, r < r_0, r_0$ e c essendo costanti geometriche.

Teorema 2.3. *Supponiamo (H) soddisfatta. Allora:*

(i) *$d(z_1, z_2) < \infty$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ e quindi d è una metrica.*

(ii) *se denotiamo con $B(z, r)$ la d-sfera di centro z e raggio r (cioè $B(z, r) = \{z' \in \mathbb{R}^2; d(z, z') < r\}$), allora esistono due costanti geometriche $t_1 > 0$ e $b > 1$ tali che, per ogni $z_0 \in \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, t_1)$, abbiamo:*

$$Q(z_0, t/b) \subseteq B(z_0, t) \subseteq Q(z_0, bt), \tag{2.4}$$

dove, per ogni $r > 0$,

$$Q(z_0, r) = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2; |x - x_0| < r \text{ e } |y - y_0| < F(z_0, r)\}.$$

(iii) *esistono due costanti geometriche $A > 0$ e $r_0 > 0$ tali che*

$$|B(z, 2r)| \leq A\, |B(z, r)| \tag{2.5}$$

per ogni $z \in \mathcal{U}$ e $r \in (0, r_0)$, cioè lo spazio metrico $(\mathbb{R}^2, d)$ è uno spazio di tipo omogeneo rispetto alla misura di Lebesgue.

(iv) *Se $\theta > 0$, allora*

$$c_1(\theta)|B(z, r)| \leq |B(z, \theta r)| \leq c_2(\theta)|B(z, r)| \tag{2.6}$$

per ogni $z \in \mathcal{U}$ e $r < r_0$ e per opportune costanti $c_1(\theta)$ e $c_2(\theta)$ che sono costanti geometriche,eccetto per la dipendenza da θ.

Nel seguito, denoteremo con $\nabla_\lambda = (\partial_1, \lambda\partial_2)$ il gradiente degenere associato all'operatore $\mathcal{L}$ e porremo

$$|\nabla_\lambda u|^2 = |\partial_1 u|^2 + \lambda^2(x)|\partial_2 u|^2. \tag{2.7}$$

Inoltre, denoteremo con $H^1_\lambda(\Omega)$ lo spazio di Sobolev degenere associato con ∇_λ, cioè l'insieme delle $u \in L^2(\Omega)$ tali che

$$\partial_1 u \in L^2(\Omega) \qquad \lambda\partial_2 u \in L^2(\Omega),$$

fornito della norma naturale

$$\|u\|^2_{H^1_\lambda(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\partial_1 u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\lambda\partial_2 u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.8}$$

Notiamo che in questi spazi vale un teorema tipo Meyers-Serrin, cioè

$$\mathbf{C}^\infty(\Omega) \cap H^1_\lambda(\Omega) \text{ è denso in } H^1_\lambda(\Omega)$$

(si vedano [Fr], [FSSC] and [GN]). Quindi sarà naturale denotare con $\overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$ la chiusura di $C^\infty_0(\Omega)$ in $H^1_\lambda(\Omega)$.

Teorema 2.4. *Supponiamo valga (H); allora esiste una costante geometrica $c > 0$ tale che*

$$\int_\Omega |u|^2 dz \le c \int_\Omega |\nabla_\lambda u|^2 dz$$

per ogni $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$.

Possiamo ora formulare il nostro risultato principale riguardante il problema di Dirichlet per $\mathcal{L}$ in Ω.

Teorema 2.5. *Siano $f_0, f = (f_1, f_2)$ tali che $f_0, |f| \in L^2(\Omega)$. Allora esiste una ed una sola $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$ che risolve il problema di Dirichlet*

$$(2.10) \qquad (P) \quad \begin{cases} \mathcal{L}u = -div_\lambda f + f_0 & in \quad \Omega \\ u = 0 \quad su \quad \Gamma, \end{cases}$$

dove $div_\lambda f = \partial_1 f_1 + \lambda \partial_2 f_2$, nel senso che

$$\mathcal{A}(u,\varphi) = \int_\Omega \{\partial_1 u \partial_1 \varphi + \lambda^2 \partial_2 u \partial_2 \varphi\} dz = \int_\Omega \{f_1 \partial_1 \varphi + f_2 \partial_2 \varphi + f_0 \varphi\} dz = L_f(\varphi)$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Ragionando come in [F] e [FS], Teoremi 5.11 e 6.4 rispettivamente, possiamo provare il risultato seguente.

Teorema 2.6. *Se $f_0, |f| \in L^p$ per $p > p_0 = p_0(\lambda)$, allora la soluzione u di (P) è Hölderiana in $\overline{\Omega}$.*

3. Possiamo ora descrivere la nostra triangolazione.

Teorema 3.1. *Per ogni $n > 0$ esiste una decomposizione finita $\mathcal{T}_n$ del dominio $\overline{\Omega}$*

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_n} K$$

dove

(i) *ogni K è un triangolo compatto con interno non vuoto $Int(K)$;*
(ii) *$Int(K_1) \cap Int(K_2) = \emptyset$ per $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_n$ distinti;*
(iii) *se $F = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, dove K_1 e K_2 sono elementi distinti di $\mathcal{T}_n$, allora F deve essere un lato per entrambi K_1 e K_2 o un vertice per entrambi K_1 e K_2;*
(iv) *per ogni $K \in \mathcal{T}_n$ esistono $\bar{z}_K, \bar{\bar{z}}_K \in \mathbb{R}^2, \bar{r}_K, \bar{\bar{r}}_K > 0$ tali che*

$$B(\bar{z}_K, \bar{r}_K) \subseteq K \subseteq B(\bar{\bar{z}}_K, \bar{\bar{r}}_K), \quad 0 < c \le \frac{\bar{r}_K}{\bar{\bar{r}}_K} \le C,$$

c e C essendo costanti geometriche;
(v) *$\sup_K \bar{r}_K \le const\ n^{-1/(1+\gamma)}$, dove γ è la costante della Proposizione 2.2.*

Cenno della dimostrazione. Limitiamoci a costruire i vertici della triangolazione in $\overline{\Omega}^+$ dove $x \geq 0, y \geq 0$. I rimanenti vertici si otterranno per riflessione.

Scegliamo $\alpha > 0$ tale che $\alpha \int_0^1 \lambda(s)ds = 1$. Possiamo sempre assumere che la costante c_1 in (H) sia tale che $\alpha c_1 < 1$, e siano $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ scelti in modo che

$$\delta_0 = 0 \qquad \alpha \int_{\delta_j}^{\delta_{j+1}} \lambda(s)ds = \frac{1}{n} \quad \text{for} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.1}$$

A tal fine basta porre $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$ (che è strettamente crescente per (H)), e

$$\delta_j = \Lambda^{-1}\Big(\frac{j}{\alpha n}\Big), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Consideriamo allora la triangolazione di $\overline{\Omega}^+$ data dalla famiglia di nodi

$$(\delta_j, \frac{k}{n}), \qquad j = 0, \ldots, n; \quad k = 0, \ldots, n.$$

Notiamo che i nodi

$$(\delta_n, \frac{k}{n}), \qquad k = 0, \ldots, n$$

e

$$(\delta_j, \frac{n}{n}), \qquad j = 0, \ldots, n$$

stanno su Γ.

Possiamo ora procedere in modo standard per definire una spazio di funzioni di dimensione finita V_n nel modo seguente: siano $P_1, \ldots, P_N, N = N(n)$ i nodi di $\mathcal{T}_n$ che appartengono a $\mathrm{Int}(\Omega)$. Consideriamo l'insieme Φ_n di tutte le funzioni continue lineari a tratti $\varphi_j, j = 1, \ldots, N$ tali che

$$\varphi_j \equiv 0 \text{ on } \Gamma \quad \text{and} \quad \varphi_j(P_i) = \delta_{ij} \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.5}$$

e denotiamo con V_n lo spazio lineare generato da Φ_n.

Lemma 3.2. *$V_n \subset \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$ per $n \geq 1$*

Dimostrazione. Basta notare che $V_n \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subset \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$.

Una funzione $v_n \in V_n$ ha ora la rappresentazione

$$v_n(z) = \sum_{i=1}^{N} v_n(P_i)\varphi_i(z) \tag{3.6}$$

e il nostro problema di Dirichlet può ora essere approssimato dal problema seguente:

trovare $u_n \in V_n$ tale che

$$(P_n) \qquad A(u_n, v_n) = L_f(v_n) \qquad \forall v_n \in V_n \tag{3.7}$$

Come nella teoria ellittica, questa problema può essere risolto risolvendo un sistema lineare $N \times N$ la cui matrice di stiffness ha elementi dati da $\big(a(\varphi_i, \varphi_j)\big)_{i,j=1,\dots,N}$.

Ancora come nella teoria classica, possiamo definire un operatore di interpolazione $\Pi_n : \mathbf{C}^0(\bar{\Omega}) \to V_n$ ponendo

$$\Pi_n(v) = \sum_{i=1}^{N} v(P_i)\varphi_i \tag{3.8}$$

4. Enunciamo la nostra stima dell'errore sotto ipotesi un po' piú restrittive su λ.

Teorema 4.1. *Supponiamo che λ sia una funzione $\mathbf{C}^{0,1}$ che soddisfa (H) e tale che $\lambda^2 \in \mathbf{C}^{1,1}$, i suoi zeri siano isolati e appartengano Int(Ω), e che $(\lambda^2)'' \geq 0$ in un intorno di questi zeri. Se $f \in L^\infty(\Omega)$, allora esiste una ed una sola $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$ tale che*

$$\mathcal{L}_0 u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Inoltre, le approssimazioni di Galerkin $u_n \in V_n$ definite da (3.7) convergono a $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$ per $n \to \infty$ e vale la seguente stima dell'errore:

$$\|u - u_n\|_{H^1_\lambda(\Omega)} \leq B n^{-1/(1+\gamma)} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

dove B è una costante geometrica.

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre che $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(x) > 0$ if $x \neq 0$. Inoltre, possiamo assumere che $\lambda(x') \geq \lambda(x'')$ per $0 \leq x'' \leq x'$ e $\lambda(x') \leq \lambda(x'')$ per $x'' \leq x' \leq 0$. Come in [QV], Teorema 5.2.1, esistono $B_1, B_2 > 0$ dipendenti solo da ν e dalla costante c di (2.9) tali che

$$\|u_n\|_{H^1_\lambda(\Omega)} \leq B_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.1}$$

$$\|u_n - u\|_{H^1_\lambda(\Omega)} \leq B_2 \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_{H^1_\lambda(\Omega)}. \tag{4.2}$$

D'altra parte

$$\inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_{H^1_\lambda(\Omega)} \leq \|u - \Pi_n(u)\|_{H^1_\lambda(\Omega)} \tag{4.3}$$

poichè $\Pi_n(u)$ è ben definito in forza della continuità di u e appartiene a V_n per il Lemma 3.2. Combinando (4.2) e (4.3) segue che $u_n \to u$ in $H^1_\lambda(\Omega)$ una volta provato che $\|u - \Pi_n(u)\|_{H^1_\lambda(\Omega)} \to 0$ per $n \to \infty$.

Ora

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_n(u)\|_{H^1_\lambda(\Omega)} &\leq c\big\{\|u - \Pi_n(u)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_\lambda(u - \Pi_n(u))\|_{L^2(\Omega)}\big\} \\ &= c \sum_{K \in \mathcal{T}_n} \big\{\|u - \Pi_n(u)\|_{L^2(K)} + \|\nabla_\lambda(u - \Pi_n(u))\|_{L^2(K)}\big\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Abbiamo:

Lemma 4.2. *Esiste una costante geometrica $B_3 > 0$ tale che, se poniamo $X_1 = \partial_1$, $X_2 = \lambda\partial_2$, allora, se $K \in \mathcal{T}_n$*

$$\begin{aligned} &\|u - \Pi_n(u)\|_{L^2(K)} + \|\nabla_\lambda(u - \Pi_n(u))\|_{L^2(K)} \leq \\ &\qquad B_3\Big\{\|X_1^2 u\|_{L^2(K)} + \|X_2^2 u\|_{L^2(K)} + \|X_2 X_1 u\|_{L^2(K)}\Big\} n^{-1/(1+\gamma)}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Notiamo che $\mathrm{Int}(K)$ non interseca nè Γ nè la linea di degenerazione $x = 0$, così che $u \in C^{2,\alpha}(K)$, per le stime classiche di Schauder.

Proof. Prima stimiamo

$$\int_K |\nabla_\lambda(u - \Pi_n(u))|^2 dxdy = \int_K |\nabla_\lambda(u - \sum_{i=1}^{3} u(Q_i)\varphi_i)|^2 dxdy = I_2, \tag{4.6}$$

dove Q_1, Q_2, Q_3 sono i vertici di K.

Supponiamo ad esempio che che K abbia vertici $(\delta_j, \frac{k}{n}), (\delta_{j+1}, \frac{k}{n}), (\delta_j, \frac{k+1}{n})$, e poniamo

$$\begin{cases} x = \delta_j + (\delta_{j+1} - \delta_j)x' \\ y = \frac{k}{n} + \frac{1}{n}y' \,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Questo cambio di variabili muta K nel triangolo fisso di vertici (0,0), (1,0), (0,1) e il suo determinante jacobiano vale $2|K|$, così che, se denotiamo con $\tilde{v}$ una generica funzione v scritta nelle nuove variabili x', y', otteniamo

$$\int_K |v - \Pi_n(v)|^2 dxdy = 2|K| \int_{\tilde{K}} |\tilde{v} - \sum_{i=1}^{3} \tilde{v}(\tilde{Q}_i)\tilde{\varphi}_i|^2 dx'dy' \tag{4.8}$$

Notiamo ora che

$$\partial_{x'}\tilde{v} = (\delta_{j+1} - \delta_j)\widetilde{\partial_x v} \qquad \partial_{y'}\tilde{v} = \frac{1}{n}\widetilde{\partial_y v}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int_K |\partial_x(u - \sum_{i=1}^{3} u(Q_i)\varphi_i)|^2 dxdy &= 2|K| \int_{\tilde{K}} |\widetilde{\partial_x(\ldots)}|^2 dx'dy' \\ &= \frac{2|K|}{(\delta_{j+1} - \delta_j)^2} \int_{\tilde{K}} |\partial_{x'}\widetilde{(\ldots)}|^2 dx'dy' \\ &= \frac{1}{n(\delta_{j+1} - \delta_j)} \int_{\tilde{K}} |\partial_{x'}\widetilde{(\ldots)}|^2 dx'dy'. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Analogamente

$$\int_K |\lambda(x)\partial_y(u - \sum_{i=1}^{3} u(Q_i)\varphi_i)|^2 dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= n(\delta_{j+1}-\delta_j)\int_{\tilde K}\lambda^2(\delta_j+(\delta_{j+1}-\delta_j)x')|\partial_{y'}\widetilde{(\dots)}|^2dx'dy'\\
&\le n(\delta_{j+1}-\delta_j)\cdot(\max_{[\delta_j,\delta_{j+1}]}\lambda)^2\int_{\tilde K}|\partial_{y'}\widetilde{(\dots)}|^2dx'dy'\\
&\le \frac{1}{c_1{}^2}\frac{n}{(\delta_{j+1}-\delta_j)}\Big(\int_{\delta_j}^{\delta_{j+1}}\lambda(t)dt\Big)^2\int_{\tilde K}|\partial_{y'}\widetilde{(\dots)}|^2dx'dy'\\
&= c\frac{1}{n(\delta_{j+1}-\delta_j)}\int_{\tilde K}|\partial_{y'}\widetilde{(\dots)}|^2dx'dy',\\
&\text{by (3.1),}
\end{aligned}
$$

così che

$$
I_2 \le c\frac{1}{n(\delta_{j+1}-\delta_j)}|\tilde u-\sum_{i=1}^{3}\tilde u(\tilde Q_i)\tilde\varphi_i|^2_{H^1(\tilde K)}, \tag{4.10}
$$

dove $\tilde Q_1,\tilde Q_2,\tilde Q_3$ sono i vertici di $\tilde K$, e $|\cdot|_{H^k(\tilde K)}$ denota la seminorma data dalla somma delle norme L^2 delle derivate massime. Possiamo ora applicare la stima classica

$$
|\tilde u-\sum_{i=1}^{3}\tilde u(\tilde Q_i)\tilde\varphi_i|^2_{H^1(\tilde K)}\le c|\tilde u|^2_{H^2(\tilde K)} \tag{4.11}
$$

(si veda [QV], Teorema 3.4.1) ottenendo

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le c\frac{1}{n(\delta_{j+1}-\delta_j)}\Big\{\|\partial^2_{x'}\tilde u\|^2_{L^2(\tilde K)}+\|\partial^2_{y'}\tilde u\|^2_{L^2(\tilde K)}+\|\partial_{y'}\partial_{x'}\tilde u\|^2_{L^2(\tilde K)}\Big\}\\
&= c\Big\{\frac{(\delta_{j+1}-\delta_j)^3}{n}\|\widetilde{\partial^2_x u}\|^2_{L^2(\tilde K)}+\frac{1}{n^5(\delta_{j+1}-\delta_j)}\|\widetilde{\partial^2_y u}\|^2_{L^2(\tilde K)}\\
&\qquad\qquad +\frac{(\delta_{j+1}-\delta_j)}{n^3}\|\widetilde{\partial_y\partial_x u}\|^2_{L^2(\tilde K)}\Big\}\\
&= c\Big\{(\delta_{j+1}-\delta_j)^2\|\partial^2_x u\|^2_{L^2(K)}+\frac{1}{n^4}\|\partial^2_y u\|^2_{L^2(K)}+\frac{1}{n^2}\|\partial_y\partial_x u\|^2_{L^2(K)}\Big\}\\
&= \{J_1+J_2+J_3\}.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Notiamo ora che J_1 può essere scritto come segue:

$$
J_1=(\delta_{j+1}-\delta_j)^2\|X_1^2u\|^2_{L^2(K)};
$$

il prossimo passo consisterà nel provare che

$$
J_2\le c(\delta_{j+1}-\delta_j)^2\|X_2^2u\|^2_{L^2(K)} \quad\text{e}\quad J_3\le c(\delta_{j+1}-\delta_j)^2\|X_2X_1u\|^2_{L^2(K)}. \tag{4.13}
$$

A tal fine osserviamo che, se $x\in K$, per la monotonia di λ,

$$
\lambda(x)\ge\lambda(\delta_j)\ge\frac{1}{\delta_j-\delta_{j-1}}\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j}\lambda(t)dt=\frac{1}{n(\delta_j-\delta_{j-1})},
$$

così che (4.13) seguirà provando che

$$\delta_j - \delta_{j-1} \leq c(\delta_{j+1} - \delta_j) \tag{4.14}$$

per ogni $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

D'altro canto è facile vedere che

$$d((\delta_{j-1}, k/n), (\delta_j, k/n)) \leq \delta_j - \delta_{j-1},$$

così che, per la Proposizione 2.2 (ix), abbiamo:

$$\begin{aligned} F((\delta_j, k/n), \delta_j - \delta_{j-1}) &\leq cF((\delta_{j-1}, k/n), \delta_j - \delta_{j-1}) \\ &= c\int_{\delta_{j-1}}^{\delta_j} \lambda(t)dt = \frac{c}{\alpha n} = c\int_{\delta_j}^{\delta_{j+1}} \lambda(t)dt \\ &= cF((\delta_j, k/n), \delta_{j+1} - \delta_j) \leq F((\delta_j, k/n), c'(\delta_{j+1} - \delta_j)), \end{aligned}$$

per la Proposizione 2.2 (v), e quindi (4.14) segue dalla monotonia della funzione $t \to F((\delta_j, k/n), t)$.

Dunque

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c(\delta_{j+1} - \delta_j)^2 \left\{ \|X_1^2 u\|^2_{L^2(K)} + \|X_2^2 u\|^2_{L^2(K)} + \|X_2 X_1 u\|^2_{L^2(K)} \right\} \\ &\leq n^{-2/(1+\gamma)} \left\{ \|X_1^2 u\|^2_{L^2(K)} + \|X_2^2 u\|^2_{L^2(K)} + \|X_2 X_1 u\|^2_{L^2(K)} \right\}, \end{aligned}$$

per il Teorema 3.1 (iv) e (v). Finalmente, il termine

$$I_1 = \int_K |u - \Pi_n(u)|^2 dxdy$$

può essere stimato nello stesso modo.

Combinando ora (4.4) e (4.5), la prova del Teorema 4.1 sarà completata provando la seguente stima a priori:

Theorem 4.3. *Supponiamo $f \in L^\infty(\overline{\Omega})$; allora esiste una ed una sola $u \in \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$ tale*

$$\mathcal{L}_0 u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Inoltre, $u \in \mathbf{C}^\sigma(\overline{\Omega})$ per un opportuno $\sigma \in (0,1)$, $X_1^2 u, X_2^2 u, X_2 X_1 u \in L^2(\Omega)$ ed esiste una costante geometrica $B_4 > 0$ tale che

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_\lambda u\|_{L^2(\Omega)} + \|X_1^2 u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \|X_2^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|X_2 X_1 u\|_{L^2(\Omega)} \leq B_4 \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Proof. La prova è piuttosto macchinosa, e richiede una preliminare approssimazione del problema con problemi ellittici in regioni regolari in modo da poter lavorare con funzioni

almeno tre volte derivabili con continuità. Successivamente, la prova consiste di un certo numero di integrazioni per parti e di argomenti ad hoc per la struttura dell'equazione e dell'insieme. La regolarità vicino agli spigoli segue da un risultato di Grisvard ([G], Teorema 1).

5. In questo paragrafo descriveremo alcuni test numerici dei nostri risultati; come abbiamo sottolineato nell'Introduzione, il numero $\gamma + 2$ gioca il ruolo di una dimensione, che può essere molto grande se l'operatore è fortemente degenere. A causa di questo, per stimare l'andamento delle nostre stime dobbiamo lavorare con reticoli contenenti una grande numero di punti, e, per questa ragione, dobbiamo scegliere accuratamente la nostra implementazione. L'algoritmo che abbiamo usato per effettuare la nostra integrazione numerica è un unified multilevel adaptive refinement method, la cui descrizione tecnica dettagliata può essere trovata in [M1,M2].

A differenza del caso ellittico, nel nostro caso il raffinamento non può essere ovviamente effettuato bisecando coppie di triangoli, in quanto vogliamo riprodurre la geometria associata all'operatore differenziale considerato. Ciononostante, lo schema della base gerarchica può ancora essere applicato poichè, da (3.2), si può vedere che ad ogni livello di raffinamento, tutti i vecchi nodi sono sono conservati, e altri nuovi sono aggiunti. Questo è esattamente il principio su cui si fonda l'approccio delle basi gerarchiche. Infatti la base gerarchica coincide con l'usuale base nodale al primo livello di raffinamento, mentre, con il procedere del raffinamento, uno o più nodi vengono aggiunti, e per ogni nodo viene definita una nuova funzione che vale 1 al nuovo nodo e 0 in tutti gli altri nodi, ma le funzioni delle basi esistenti non vengono cambiate. La scelta della base gerarchica porta a una rappresentazione di $\Pi_n(u)$ che differisce da (3.8) e quindi a una nuova matrice di stiffness: il guadagno algoritmico è descritto in [BDY] e [M2].

Come esempio, scegliamo

$$\lambda = \sqrt{\beta} m |x|^{m-1} \text{ per } \beta > 0 \text{ e } m > 1;$$

si verifica facilmente che (2.4) vale con $\gamma = m - 1$. Poniamo ora

$$R = \beta |x|^{2m} + y^2 \qquad \text{e} \qquad u = R^{1/m},$$

e, per finire,

$$v = (1 - x^2)(1 - y^2)u.$$

Un calcolo diretto mostra che $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$, e che $f = \mathcal{L}v \in L^\infty(\Omega)$; d'altra parte notiamo esplicitamente che, se $m > 2.5$, allora v non appartiene allo spazio di Sobolev usuale $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Quest'ultimo fatto non é sorprendente, poiché la funzione u é equivalente al quadrato della distanza d del punto (x, y) dall'origine (si veda [FL]), cosí che riflette in modo piuttosto sottile le proprietá dell'operatore $\mathcal{L}$.

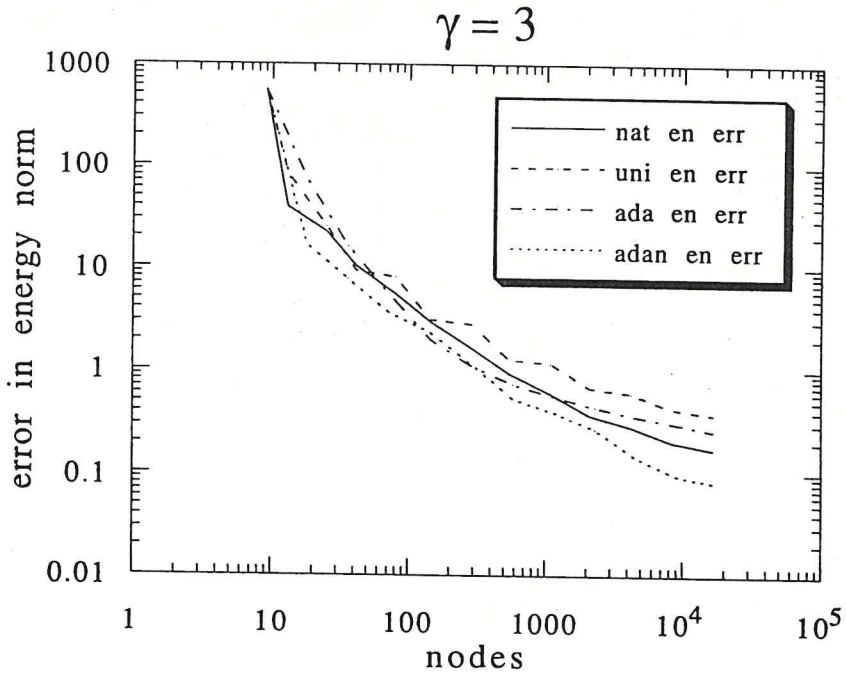
Possiamo ora valutare l'errore di discretizzazione nella norma dell'energia

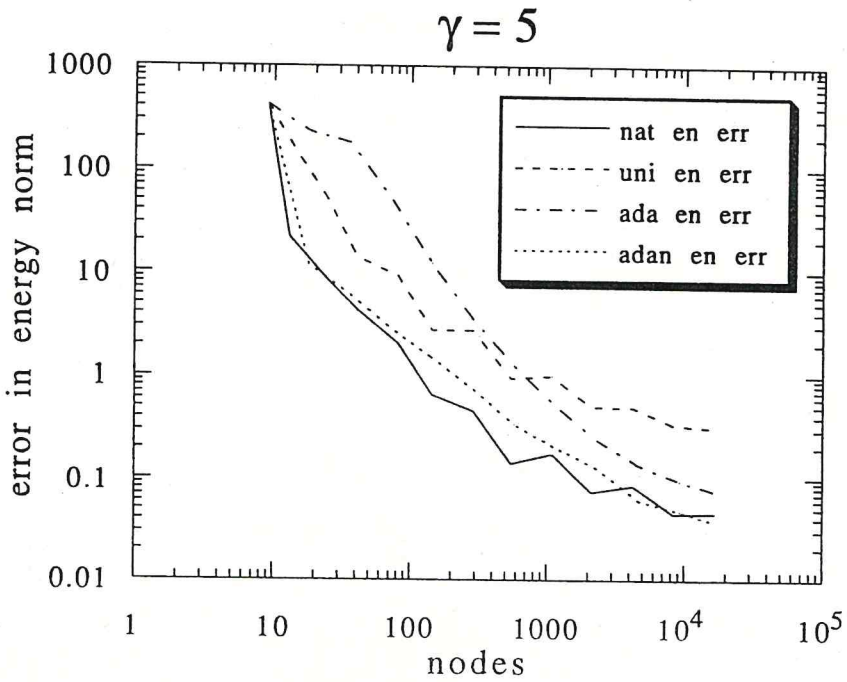
$$\|\partial_x(v - v_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|\lambda \partial_y(v - v_n)\|_{L^2(\Omega)},$$

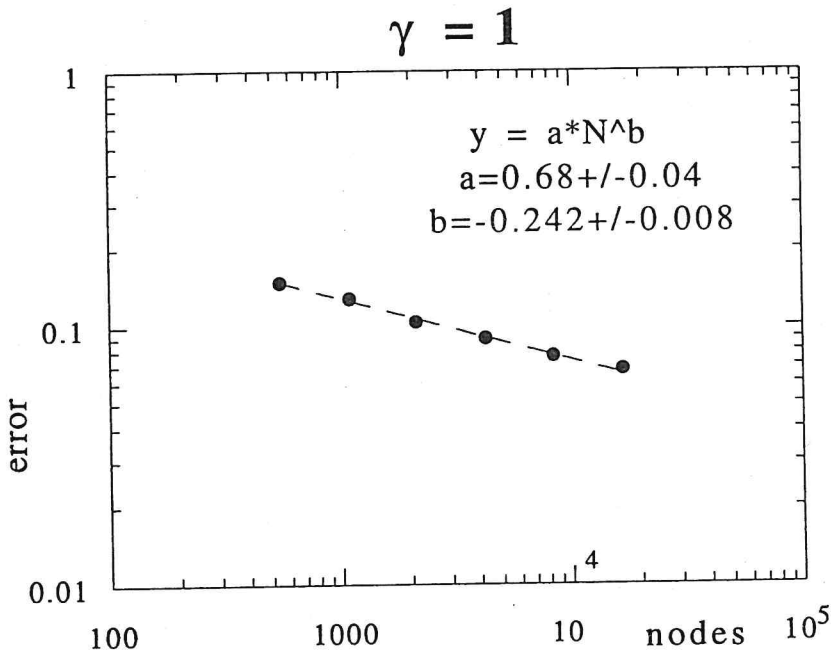
che non solo é la sola norma associata naturalmente all'operatore, ma é anche la sola norma 'ragionevole', poiché in generale la norma H^1 di v é infinita. Per il Teorema 2.4, la norma dell'energia é equivalente alla norma $\overset{\circ}{H}{}^1_\lambda(\Omega)$.

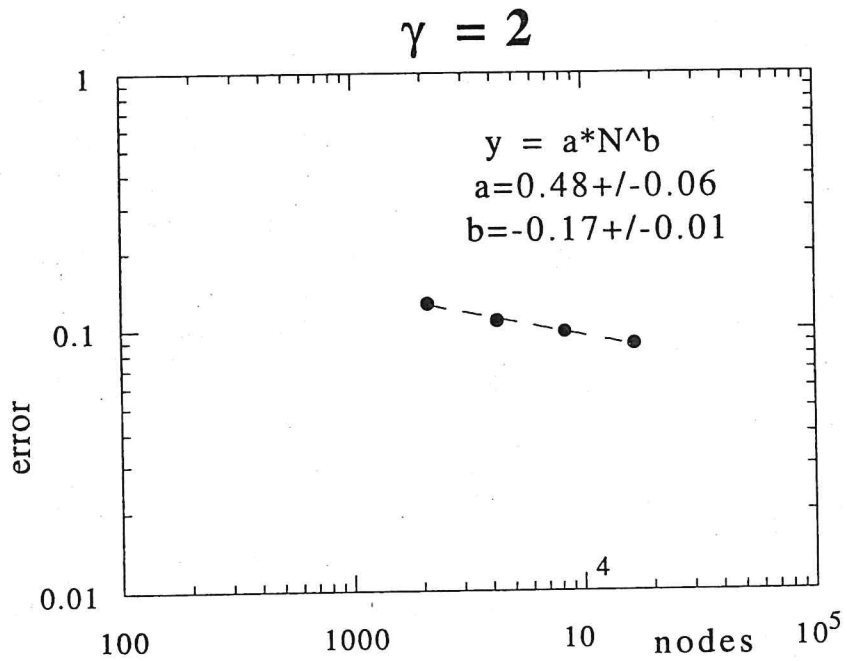
Nei disegni seguenti abbiamo plottato in una scala log - log questi errori come funzione di $N = n^2$ = numero dei nodi della nostra triangolazione (chiamata triangolazione naturale), e l'abbiamo confrontato con l'errore – a paritá di numero di nodi – per una versione adattiva della triangolazione naturale, per una triangolazione uniforme e per una triangolazione uniforme adattiva. I grafici corrispondono a $m = 4$ e $m = 6$.

Abbiamo inoltre valutato il trend dell'errore confrontandolo con il valore dato dalla stima teorica per $m = 2$ e $m = 3$, sempre in scala log-log. In questi casi l'errore atteso é rispettivamente 0.25 e 0.17, che é rispettato con sufficiente precisione.


γ = 3
1000
100
10
1
0.1
0.01
error in energy norm
1
10
100
1000
10^4
10^5
nodes
nat en err
uni en err
ada en err
adan en err


γ = 5
1000
100
10
1
0.1
0.01
error in energy norm
1
10
100
1000
10^4
10^5
nodes
nat en err
uni en err
ada en err
adan en err


γ = 1
y = a*N^b
a=0.68+/-0.04
b=-0.242+/-0.008
1
0.1
0.01
error
100
1000
10
4
nodes
10^5


γ = 2
y = a*N^b
a=0.48+/-0.06
b=-0.17+/-0.01
1
0.1
0.01
error
100
1000
10
4
nodes
10^5

References

[BDY] R.E. Bank, T.F. Dupont and H. Yserentant, *The hierarchical basis multigrid method*, Num. Math. **52** (1988), 427–458.

[CDG1] L. Capogna, D. Danielli and N. Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Comm. in Analysis and Geometry **2** (1994), 203–215.

[CDG2] ———, *Subelliptic mollifiers and a basic pointwise estimate of Poincaré type*, Math. Z. (to appear).

[CF] C. Cancelier and B. Franchi, *Subelliptic estimates for a class of degenerate elliptic integro–differential operators*, Math. Nachr. (to appear).

[DG] E. De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **3** (1957), 25–43.

[F] B. Franchi, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities and pointwise estimates for a class of degenerate elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 125–158.

[Fr] K.O. Friedrichs, *The identity of weak and strong estension of differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 132–151.

[FGaW] B. Franchi, S. Gallot and R.L. Wheeden, *Sobolev and isoperimetric inequalities for degenerate metrics*, Math. Ann. **300** (1994), 557–571.

[FGuW1] B. Franchi, C. Gutierrez and R.L. Wheeden, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operators*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), 523–604.

[FGuW2] B. Franchi, C. Gutierrez and R.L. Wheeden, *Two-weight Sobolev-Poincaré inequalities and Harnak inequality for a class of degenerate elliptic operators*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur **5** (9) (1994), 167–175.

[FL] B. Franchi and E. Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **10** (4) (1983), 523–541.

[FLW] B. Franchi, G. Lu and R.L. Wheeden, *Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **45** (1995), 577–604.

[FP] C. Fefferman and D.H. Phong, *Subelliptic eigenvalue problems*, Conference on Harmonic Analysis, Chicago, 1980, (W. Beckner et al., eds.), Wadsworth, 1981, pp. 590–606.

[FS] B. Franchi and R. Serapioni, *Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **14** (4) (1987), 527–568.

[FSSC] B. Franchi, R. Serapioni and F. Serra Cassano, *Champs de vecteurs, théorème d'approximation de Meyers-Serrin et phénomème de Lavrentev pour des fonctionnelles dégénérés*, C.R. Acad. Sci. Paris **320** (I) (1995), 695–698.

[FT] B. Franchi, M. C. Tesi, *A finite element approximation for a class ofdegenerate elliptic equations*, preprint.

[G] P. Grisvard, *Behaviour of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain*, Numerical Solutions of Partial Differential Equations, III (B. Hubbard, ed.), Academic Press, New York, pp. 207–274.

[Gr] M. Gromov, *Carnot-Caratheodory spaces seen from within*, preprint of the IHES (1994).

[GN] N. Garofalo and D.M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. (to appear).

[GT] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 1977.

[Mo] J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (1961), 457–468.

[M1] W.F. Mitchell, *Unified multilevel adaptive finite element method for elliptic problems*, Ph.D. thesis, Report No. UIUCDSC-R-88-1436, Department of Computer Science, University of Illinois, Urbana, IL, 1988.

[M2] W.F. Mitchell, *Optimal multilevel iterative methods for adaptive grids*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **13** (1992), 146–167.

[MP] C. Mogavero, S. Polidoro, *A finite difference method for a boundary value problem related to the Kolmogorov equation*, Calculus (to appear).

[NSW] A. Nagel, E.M. Stein and S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[QV] A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Berlin, 1994.

[X] C.-J. Xu, *The Harnack's inequality for second order degenerate elliptic operators*, Chinese Ann. Math. Ser A **10** (1989), 103–109, in Chinese.